УДК 515.124.62

З.Н. СИЛАЕВА

ЭКСТЕНЗОРНЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВ ОТОБРАЖЕНИЙ

We prove that function spaces with filtration belong to the class of filtered absolute extensors.

Изучение экстензорных свойств профильтрованных функциональных пространств относится к теории экстензоров метрических пространств с фильтрациями, основы которой изложены в [1–6]. Одной из основных задач этой теории является нахождение профильтрованных пространств, которые обладают свойством продолжимости непрерывных отображений, сохраняющих фильтрации (так называемых профильтрованных абсолютных экстензоров, или $\mathcal{N}$-AE-пространств). Установлено, что к этому классу принадлежат линейные нормированные профильтрованные пространства [3], пространства, порожденные некоторыми функторами [6] и др. Не изученным в отношении принадлежности классу $\mathcal{N}$-AE-пространств оставался до сих пор класс функциональных профильтрованных пространств. Для тривиальных фильтраций этот вопрос положительно решен в [7]. Однако в общем профильтрованном случае он до сих пор оставался открытым, хотя и представлял значительный интерес. Сложности возникали уже при самом определении функционального профильтрованного пространства.

Мы определяем функциональное профильтрованное пространство следующим образом. Пусть Z и Y – профильтрованные метрические пространства. Рассмотрим пространство $C(Z,Y)$ всех непрерывных отображений $\varphi: Z \to Y$ с метрикой равномерной сходимости и его подпространства $C_k(Z,Y) = \{\psi \in C(Z,Y) \mid \deg\psi(z) \le \deg z + k,\ z \in Z\}$, где $k \in \mathbf{N}$. Оказалось, что эти подпространства можно рассматривать в качестве элементов фильтрации пространства $C_\infty(Z,Y) = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k(Z,Y)$. Более того, справедлива

Теорема 1. *Если Y является $\mathcal{N}$-AE-пространством, то профильтрованное пространство отображений $C_\infty(Z,Y)$ является $\mathcal{N}$-AE-пространством.*

Доказательство теоремы 1 составляет основную цель настоящей статьи и излагается в последней ее части.

Основные понятия и факты

Пространством с фильтрацией (профильтрованным пространством, или *$\mathcal{N}$-пространством)* назовем топологическое пространство X, в котором выделена последовательность замкнутых подмножеств $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots$ *(фильтрация)* такая, что $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i = X$. Непрерывное *отображение* $f: X \to Y$ двух $\mathcal{N}$-пространств X и Y будем называть *профильтрованным,* или *$\mathcal{N}$-отображением*, если $f(X_i) \subseteq Y_i$ для любого $i \in \mathbf{N}$ (f *сохраняет фильтрацию* пространства X). Поскольку композиция двух $\mathcal{N}$-отображений снова является $\mathcal{N}$-отображением, то профильтрованные пространства образуют категорию, в которой в качестве морфизмов выступают $\mathcal{N}$-отображения. Далее мы будем рассматривать категорию метрических профильтрованных пространств. Гомеоморфизм $f: X \to Y$ двух $\mathcal{N}$-пространств X и Y называется *профильтрованным гомеоморфизмом* (*$\mathcal{N}$-гомеоморфизмом*), если f и f^{-1} суть $\mathcal{N}$-отображения.

Если X – метрическое пространство с фильтрацией $\{X_i\}_{i\in\mathbf{N}}$, то его подпространство A с фильтрацией, образованной множествами $A_i = A\cap X_i$ для $i\in\mathbf{N}$, будем называть *$\mathcal{N}$-подпространством* $\mathcal{N}$-пространства X.

Пусть L – линейное топологическое пространство, одновременно являющееся профильтрованным пространством $\bigcup_{i\in\mathbf{N}} L_i$. Если каждое L_i есть линейное подпространство L, то будем называть L *линейным топологическим $\mathcal{N}$-пространством*.

Степенью точки $x\in X$ назовем число, определяемое по формуле $\deg x = \min\{i\in\mathbf{N}\mid x\in X_i\}$. Ясно, что непрерывное отображение $f: X\to Y$ двух $\mathcal{N}$-пространств является $\mathcal{N}$-отображением тогда и только тогда, когда $\deg f(x)\le \deg x$ для любой точки $x\in X$.

Рассмотрим понятия, связанные с продолжением $\mathcal{N}$-отображений. Профильтрованное отображение $f: A\to Y$, заданное на замкнутом $\mathcal{N}$-подпространстве A $\mathcal{N}$-пространства X, называется *частичным $\mathcal{N}$-отображением*. Если для f существует такое $\mathcal{N}$-отображение $\bar{f}: X\to Y$, что $\bar{f}|_A = f$, будем говорить, что *$\mathcal{N}$-отображение f допускает $\mathcal{N}$-продолжение* на X, а $\mathcal{N}$-отображение $\bar{f}$ будем называть *$\mathcal{N}$-продолжением f*. Будем говорить, что $\mathcal{N}$-пространство Y является *абсолютным (окрестностным) $\mathcal{N}$-экстензором* или *принадлежит классу* $\mathcal{N}$-A(N)E, если для любого $\mathcal{N}$-пространства X и любого его замкнутого $\mathcal{N}$-подпространства A любое частичное $\mathcal{N}$-отображение $f: A\to Y$ допускает $\mathcal{N}$-продолжение $\bar{f}: X\to Y$ (допускает $\mathcal{N}$-продолжение $\bar{f}: U\to Y$ на некоторую окрестность U множества A в X). Известно, что образ $\mathcal{N}$-AE-пространства при $\mathcal{N}$-ретракции также является $\mathcal{N}$-AE-пространством.

В [3] были получены следующие важные результаты, на которые мы будем опираться в дальнейшем.

Теорема 2. *Пусть Y – профильтрованное локально выпуклое линейное топологическое пространство. Тогда $Y\in\mathcal{N}$-AE.*

Теорема 3. *Для любого метрического профильтрованного пространства X существует линейное нормированное профильтрованное пространство Z и профильтрованный гомеоморфизм $h: X\to Y$ пространства X на некоторое замкнутое профильтрованное подмножество Y в Z, являющийся изометрией.*

Профильтрованное пространство отображений

Докажем, что семейство пространств $\{C_k(Z,Y)\}_{k\in\mathbf{N}}$, определенных в начале статьи, действительно можно рассматривать в качестве фильтрации функционального пространства $C_\infty(Z,Y)$.

Лемма. *Для любого $k\in\mathbf{N}$ пространство $C_k(Z,Y)$ замкнуто в $C_\infty(Z,Y)$.*

Доказательство. Покажем, что для любого отображения $\varphi\in C_\infty(Z,Y)\setminus C_k(Z,Y)$ существует такое число $\delta>0$, что для любого $\psi\in C_k(Z,Y)$ выполняется условие $\mathrm{dist}(\varphi,\psi)>\delta$. Условие $\varphi\in C_\infty(Z,Y)\setminus C_k(Z,Y)$ означает, что существует точка $z_0\in Z$, для которой $\deg\varphi(z_0)>\deg z_0+k$, откуда следует $\varphi(z_0)\notin Y_{\deg z_0+k}$. Поскольку множество $Y_{\deg z_0+k}$ замкнуто в Y, то расстояние $\rho(\varphi(z_0), Y_{\deg z_0+k})=\delta>0$. Условие $\psi\in C_k(Z,Y)$ означает, что $\deg\psi(z)\le\deg z+k$ для любого $z\in Z$ (в частности, для z_0), откуда следует, что $\psi(z_0)\in Y_{\deg z_0+k}$. Очевидно, $\rho(\varphi(z_0),\psi(z_0))\ge\delta$. Тогда расстояние $\mathrm{dist}(\varphi,\psi)=\sup\{\rho(\varphi(z),\psi(z))\mid z\in Z\}>\rho(\varphi(z_0),\psi(z_0))$, что и требовалось доказать.

Перейдем к доказательству теоремы 1.

Доказательство. Не теряя общности, можно считать, что $\mathrm{diam}\, Y<\infty$. Согласно теореме 3 для метрического $\mathcal{N}$-пространства Y существует линейное нормированное $\mathcal{N}$-пространство L и $\mathcal{N}$-гомеоморфизм h на некоторое замкнутое $\mathcal{N}$-подмножество $h(Y)$ в L. Так как пространство Y ограничено, а отображение h является изометрией, то можно считать, что $h(Y)$ лежит в некотором шаре Q пространства L.

Рассмотрим линейное пространство $C^*(Z,L)$ всех непрерывных ограниченных отображений $\varphi: Z\to L$ с нормой $\|\varphi\|=\sup\{|\varphi(z)|\mid z\in Z\}$. Для любого $k\in\mathbf{N}$ множество $C^*_k(Z,L)$ всех непрерывных ограниченных отображений $\psi : Z \to L$, удовлетворяющих условию $\deg \psi(z) \le \deg z + k$, $z \in Z$, образует линейное подпространство пространства $C^*(Z, L)$. Действительно, пусть φ, ψ – любые элементы из $C_k^*(Z, L)$, а λ_1, λ_2 – любые действительные числа. Для любого $z \in Z$ $\deg(\lambda_1\varphi + \lambda_2\psi)(z) = = \deg(\lambda_1\varphi(z) + \lambda_2\psi(z)) \le \max\{\deg\varphi(z), \deg\psi(z)\} \le \deg z + k$ (предпоследнее неравенство справедливо, так как $\varphi(z), \psi(z)$ принадлежат линейному $\mathcal{N}$-пространству L, все элементы фильтрации которого являются линейными пространствами). Поэтому линейная комбинация $\lambda_1\varphi + \lambda_2\psi \in C_k^*(Z, L)$, что и требовалось доказать. Итак, $C_\infty^*(Z, L) = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k^*(Z, L)$ есть линейное нормированное $\mathcal{N}$-пространство.

Так как по условию $Y \in \mathcal{N}$-AE, то существует $\mathcal{N}$-ретракция $r : L \to Y$. Ретракция $R : C_\infty^*(Z, L) \to C_\infty(Z, Y)$, сопоставляющая каждому отображению $\varphi : Z \to Q$ отображение $r \circ \varphi : Z \to Y$, сохраняет фильтрацию: если $\varphi \in C_k^*(Z, L)$, то $\deg\varphi(z) \le \deg z + k$ для любого $z \in Z$; но r есть $\mathcal{N}$-ретракция, поэтому $\deg r(\varphi(z)) \le \deg\varphi(z)$, откуда получаем, что $r \circ \varphi \in C_k(Z, Y)$.

Поскольку $C_\infty^*(Z, L)$ – линейное нормированное $\mathcal{N}$-пространство, то по теореме 2 $C_\infty^*(Z, L) \in \mathcal{N}$-AE. Тогда $C_\infty(Z, Y) \in \mathcal{N}$-AE как образ $\mathcal{N}$-AE-пространства при $\mathcal{N}$-ретракции R.

1. Ageev S., Jimenez R., Rubin L.R. // Topology and its Applications. 2004. Vol. 140. P. 5.
2. Силаева З.Н. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2009. № 3. С. 89.
3. Силаева З.Н. // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2009. № 2. С. 76.
4. Силаева З.Н. // Matematychni Studii. 2009. Т. 31. № 2. С. 180.
5. Силаева З.Н. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2010. № 1. С. 162.
6. Агеев С.М., Силаева З.Н. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 1. С. 58.
7. Борсук К. Теория ретрактов. М., 1971.

Поступила в редакцию 12.11.10.

Зоя Николаевна Силаева – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры алгебры и геометрии БрГУ им. А.С. Пушкина.